Endomorphismes échangeurs

Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1** à **5**.

— Piste rouge : tout le devoir.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est *échangeur* s'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E pour lesquels : $E = F \oplus G$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. On souhaite établir la caractérisation suivante.

Théorème (Caractérisation algébrique des endomorphismes échangeurs) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est échangeur.

(ii) u est la somme de deux endomorphismes nilpotents d'indice au plus 2 de E :

$$\exists\, a, b \in \mathscr{L}(E), \quad a^2 = b^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad u = a + b.$$

1) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose u échangeur et on note F et G deux sous-espaces vectoriels de E pour lesquels : $E = F \oplus G$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. On note en outre p_F (resp. p_G) la projection sur F (resp. G) parallèlement à G (resp. F) et on pose $a = p_F u$ et $b = p_G u$.

Montrer que a et b sont nilpotents d'indice au plus 2 et que $u = a + b$.

La suite du problème est entièrement consacrée à la démonstration de l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).

2) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est à la fois un automorphisme de E et la somme de deux endomorphismes a et b de E nilpotents d'indice au plus 2.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} a$ et $\operatorname{Ker} b$ sont en somme directe.

b) En déduire que $E = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b$.

c) En déduire que u est échangeur.

1 Réduction au cas nilpotent

3) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et A et B deux sous-espaces vectoriels de E stables par u pour lesquels $E = A \oplus B$. Montrer que si $u|_A$ et $u|_B$ sont échangeurs, alors u l'est aussi.

4) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On souhaite établir le résultat suivant, dit *décomposition de Fitting de E par rapport à u* : $\exists\, p \in [\![1, n]\!]$, $E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.

a) Comparer $\operatorname{Ker} u^k$ et $\operatorname{Ker} u^{k+1}$ et montrer que $\operatorname{Ker} u^k$ et $\operatorname{Im} u^k$ sont stables par u pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer l'existence d'un plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ pour lequel $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$. Cet entier que l'on notera p est appelé l'*indice de u*. On pourra distinguer le cas où u est injectif de celui où il ne l'est pas.

c) Montrer que pour tout $k \geqslant p$: $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^p$ et $\operatorname{Im} u^k = \operatorname{Im} u^p$.

d) En déduire que $E = \operatorname{Ker} u^p \oplus \operatorname{Im} u^p$.

e) Montrer que $u|_{\operatorname{Ker} u^p}$ est nilpotent et que $u|_{\operatorname{Im} u^p}$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} u^p$.

5) On conserve les notations de la question **4)**, mais on suppose de plus que u est la somme de deux endomorphismes a et b de E nilpotents d'indice au plus 2.

a) Montrer que u^2 commute à a et b.

b) En déduire que $\mathrm{Ker}\, u^p$ et $\mathrm{Im}\, u^p$ sont stables par a et b.

c) Montrer que $u|_{\mathrm{Im}\, u^p}$ est échangeur.

d) On admet momentanément que tout endomorphisme nilpotent est échangeur. En déduire que u est échangeur.

2 Cas nilpotent

D'après le résultat de la question **5)d)**, l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) sera démontrée si on arrive à prouver que tout endomorphisme nilpotent est échangeur.

6) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. Pour tout $x \in E$, on note ev_x la forme linéaire $\varphi \longmapsto \varphi(x)$ de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

a) Montrer que l'application $x \overset{\mathrm{ev}}{\longmapsto} \mathrm{ev}_x$ est un isomorphisme de E sur $\mathscr{L}\big(\mathscr{L}(E,\mathbb{K}),\mathbb{K}\big)$.

Soit $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ une famille libre de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. On pose $B = \Big\{x \in E \mid \quad \forall i \in [\![1,r]\!], \quad \varphi_i(x) = 0\Big\}$.

b) Montrer que B est un sous-espace vectoriel de E.

D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ en une base $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et noter $\big(\varphi_1^\star,\ldots,\varphi_n^\star\big)$ la famille des formes coordonnées associée.

c) Montrer que $\mathrm{ev}(B) = \mathrm{Vect}\big(\varphi_{r+1}^\star,\ldots,\varphi_n^\star\big)$, puis en déduire la dimension de B.

À présent, soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

7) **a)** Justifier l'existence d'un vecteur $y \in E$ pour lequel $u^{p-1}(y) \neq 0_E$, puis calculer la dimension du sous-espace vectoriel $A = \mathrm{Vect}\Big(y, u(y), \ldots, u^{p-1}(y)\Big)$.

b) En déduire que $p \leqslant n$, et que si $p = n$, alors u est échangeur.

On suppose désormais que $p \in [\![1, n-1]\!]$.

8) **a)** Justifier l'existence d'une forme linéaire $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ pour laquelle $\varphi\big(u^{p-1}(y)\big) \neq 0$.

b) Montrer que la famille $\Big(\varphi, \varphi \circ u, \ldots, \varphi \circ u^{p-1}\Big)$ est libre.

On pose $B = \Big\{x \in E \mid \quad \forall i \in [\![0, p-1]\!], \quad \varphi\big(u^i(x)\big) = 0\Big\}$.

9) Montrer que A et B sont stables par u.

10) **a)** Montrer que A et B sont en somme directe.

b) En déduire que $E = A \oplus B$.

11) Achever de montrer que u est échangeur.